

Kolokwium nr 1 z analizy matematycznej II.1

25 listopada 2024, 14:15 – 17:15

Każdą kartkę należy czytelnie podpisać.

Rozwiązanie różnych zadań należy umieścić na oddzielnych kartkach.

Zadania należy rozwiązywać samodzielnie.

Nie wolno korzystać z książek, notatek z zajęć itp., pomocy innych osób, internetu.

Należy szczegółowo uzasadniać rozwiązania powołując się na odpowiednie twierdzenia, lematy, ...

Maksymalna punktacja za kolokwium: 35 punktów.

Zadanie 1 (8 pkt.). Określmy $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x^5 y^4}}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

a) Wykazać, że f jest ciągła na $\mathbb{R}^2$.

b) Znaleźć wszystkie punkty różniczkowalności funkcji f .

Zadanie 2 (8 pkt.). Uzasadnić, że funkcja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x, y) = x^3 y^2 \left(\frac{3x^2}{7} + \frac{2y^2}{7} - 1 \right)$

przyjmuje na zbiorze $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3x^2}{7} + \frac{2y^2}{7} \leq 1 \right\}$ wartość najmniejszą i największą. Znaleźć te wartości i punkty, w których są przyjmowane. Rozstrzygnąć, czy funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie $p = (0, \frac{\sqrt{7}}{2})$. Jeśli tak, określić rodzaj ekstremum.

Zadanie 3 (8 pkt.). Załóżmy, że funkcja $f: (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Wykazać, że f spełnia równanie

$$y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{xy} f(x, y) \quad \text{dla wszystkich } x, y > 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka różniczkowalna $\varphi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, że $f(x, y) = xy\varphi(x^2 + y^2)$ dla wszystkich $x, y > 0$.

Zadanie 4 (8 pkt.). a) (4 pkt.) Dany jest zbiór X i miara zewnętrzna μ^* określona na jego podzbiorach, taka że $\mu^*(X) < \infty$. Dla $A \subset X$ definiujemy $\nu^*(A) = \frac{\mu^*(A)}{1 + \mu^*(A)}$. Wykazać, że ν^* jest miarą zewnętrzną na X .

b) (4 pkt.) Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{dla pewnych liczby wymiernych } p, q \text{ zachodzi } px + qy = 2024\}$. Uzasadnić, że zbiór A jest mierzalny i znaleźć $\lambda_2(A)$.

Zadanie 5 (8 pkt.). Niech μ będzie miarą określoną na borelowskich podzbiorach $\mathbb{R}$ taką, że $\mu(A) = 1$ dla każdego A takiego, że $\lambda_1(A) = 1$. Udowodnij, że

a) $\mu(Z) = 0$ dla dowolnego borelowskiego Z takiego, że $\lambda_1(Z) = 0$;

b) jeśli $b - a = \frac{1}{2}$, to $\mu([a, b]) = \frac{1}{2}$;

c) $\mu([a, b]) = b - a$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.